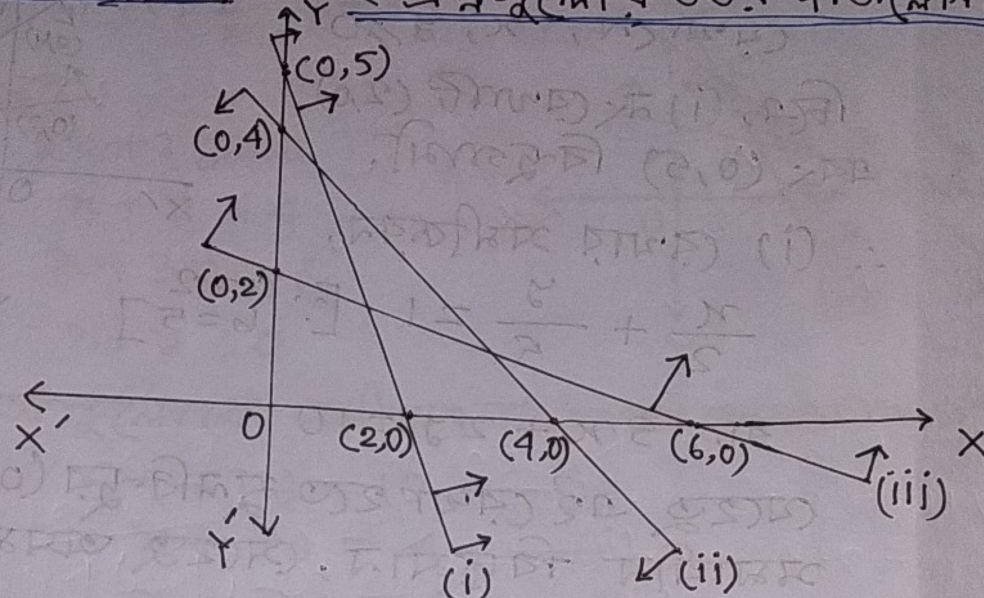
উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়: ০২ (যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম)

নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান (পাঠ পরিকল্পনা: ০১)

১। উদ্দীপকটি লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: (ক্লাস ১+২)



ক) সিদ্ধান্ত চলক কাকে বলে? কেন ঋণাত্মক হয় না? ২

খ) উদ্দীপকের সিদ্ধান্ত চলক x ও y হলে, সীমাবদ্ধতা সমূহ গঠন কর? ৪

গ) উদ্দীপক অনুসারে উদ্দেশ্য অপেক্ষক, $z = x+3y$ কে সর্বনিম্ন করন কর। ৪

সমাধান:

১ নং প্রশ্নের উত্তর [নম্বর বিভাজন: সংজ্ঞা=১, কারণ=১]

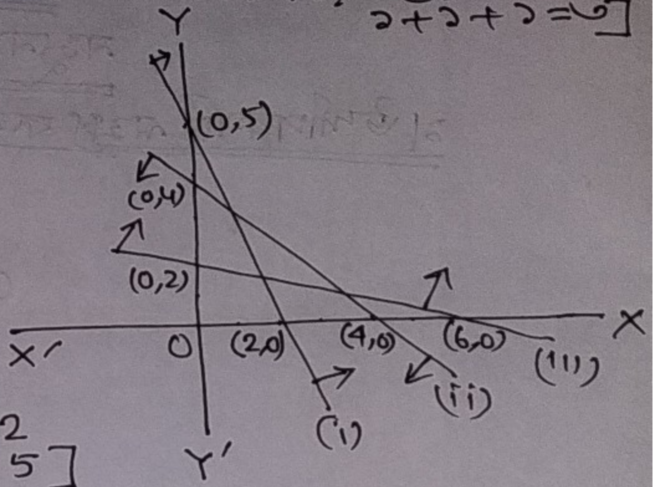
(ক)

সিদ্ধান্ত চলক: যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাটিতে যা নির্ণয় করতে বলা হয়েছে তার সাথে সংশ্লিষ্ট পরিবর্তনশীল অজানা রাশিকে সিদ্ধান্ত চলক বলে। এদেরকে x, y, p, q ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ঋণাত্মক নয় কেন?: সিদ্ধান্ত চলক দ্বারা সাধারনত কোন দ্রব্যের মান, সংখ্যা, মূল্য ইত্যাদি অঋণাত্মক রাশিকে প্রকাশ করা হয় বলে এরা ঋণাত্মক নয় অর্থাৎ $x, y, p, q, \cdots \geq 0$

(P.T.O)

১(খ) নং উত্তর [নম্বর বিভাজন: চিত্র-১, সমীকরণ-১, অসমতা-১ ১+১+১=৩]



ধরি,

সিদ্ধান্ত চলক x ও y

যেখানে, $x, y \geq 0$

চিত্রে, (i) নং রেখাটি (2,0) এবং (0,5) বিন্দুগামী,

∴ (i) রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \quad [\because a=2,\ b=5]$$

বা, $5x + 2y = 10$

যেহেতু এই রেখা হতে মূলবিন্দুর (0,0) বিপরীত দিকে সমাধান বিদ্যমান, সেহেতু অসমতা বা সীমাবদ্ধতা হবে, $5x + 2y \geq 10$ —— (iv)

(ii) নং রেখাটি (4,0) এবং (0,4) বিন্দুগামী,

∴ (ii) নং এর সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

বা, $x + y = 4$

এই রেখা হতে মূলবিন্দুর দিকে সমাধান বিদ্যমান,

∴ অসমতা হবে, $x + y \leq 4$ —— (v)

আবার, (iii) নং রেখাটি (6,0) ও (0,2) বিন্দুগামী,

∴ (iii) নং এর সমীকরণ, $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$

বা, $x + 3y = 6$,

এই রেখা হতে মূলবিন্দুর বিপরীতে সমাধান বিদ্যমান। ∴ অসমতা হবে, $x + 3y \geq 6$ —— (vi)

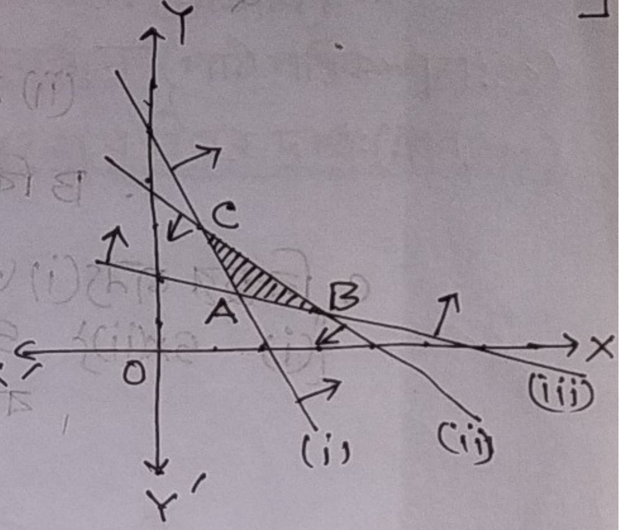
∴ নির্ণেয় সীমাবদ্ধতা সমূহ:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &\geq 10 \\ x + y &\leq 4 \\ x + 3y &\geq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{Ans.}$$

১নং প্র. উত্তর (গ) [নম্বর বিভাজন: চিত্র=১, প্রোগ্রাম=১, বিন্দু নির্ণয়=১, z নির্ণয়=১]

প্রশ্নানুসারে, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি নিম্নরূপ,

উদ্দেশ্য অপেক্ষক, $z_{min} = x + 3y$



সীমাবদ্ধতা:

$$5x + 2y \geq 10$$
$$x + y \leq 4$$
$$x + 3y \geq 6$$
$$x, y \geq 0$$

অসমতাগুলোকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$5x + 2y = 10 \quad \text{---(i)}$$
$$x + y = 4 \quad \text{---(ii)}$$
$$x + 3y = 6 \quad \text{---(iii)}$$

উদ্দীপকে (i) ও (iii) এর সমাধান মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে এবং (ii) নং এর সমাধান মূলবিন্দুর দিকে বিদ্যমান। তাই, চিত্রে ABC গাঢ় চিহ্নিত এলাকাটি হবে নির্ণেয় সমাধান এলাকা, যার প্রান্ত বিন্দুসমূহ A, B, C.

A বিন্দু নির্ণয়ের জন্য (i) ও (iii) নং কে সমাধান করে পাই,

$\{(i) - 5\times(iii)\}$ করে, $5x + 2y - 5x - 15y = 10 - 30$

বা, $-13y = -20$

$\therefore y = \frac{20}{13}$

(iii) নং হতে পাই, $x = 6 - 3\times\frac{20}{13}$

$= \frac{18}{13}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{18}{13}, \frac{20}{13}\right)$

অ.পৃ.দ্র.

B বিন্দুর জন্য (ii) ও (iii) নং হতে পাই, $2y = 2$ [(iii) − (ii) করে]

বা, $y = 1$

(ii) নং হতে, $x = 4 - 1 = 3$

∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 1)$

C বিন্দুর জন্য (i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\{(i) - 5\times(ii)\}$ $5x + 2y - 5x - 5y = 10 - 20$

বা, $-3y = -10$

$\therefore y = \frac{10}{3}$

(ii) নং হতে, $x = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$

∴ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

এখন,

$A\left(\frac{18}{13}, \frac{20}{13}\right)$ বিন্দুতে, $z = x + 3y = \frac{18}{13} + \frac{60}{13} = \frac{78}{13} = 6$ (সর্বনিম্ন)

$B(3, 1)$ বিন্দুতে, $z = x + 3y = 3 + 3 = 6$ (সর্বনিম্ন)

$C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ " , $z = x + 3y = \frac{2}{3} + \frac{30}{3} = \frac{32}{3}$

$\therefore z_{min} = 6$, যখন $x = \frac{18}{13}, y = \frac{20}{13}$

অথবা, $x = 3, y = 1$ } Ans.

** অতিরিক্ত নমুনা প্রশ্ন

[বি. দ্র. কলেজ খোলার পর ১টি খাতায় পাঠ পরিকল্পনায় প্রদত্ত বাড়ীর কাজ সমাধান করে জমা দিতে হবে।]

২। উদ্দীপক অনুসারে প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: (ক্লাস: ০৩)

এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা ও 4 খানা তোয়ালে কিনতে চান। প্রতিখানা গামছার দাম 30 টাকা ও তোয়ালের দাম 40 টাকা।

ক) $x + y \leq 7$ অসমতা দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রটি কিরূপ?

খ) উদ্দীপক অনুসারে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাটি গঠন কর যেন তিনি সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারেন?

গ) লেখচিত্রের মাধ্যমে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি সমাধান কর।

সমাধান:

২(ক) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত অসমতা, $x + y \leq 7$ —— (i)

ইহাকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই

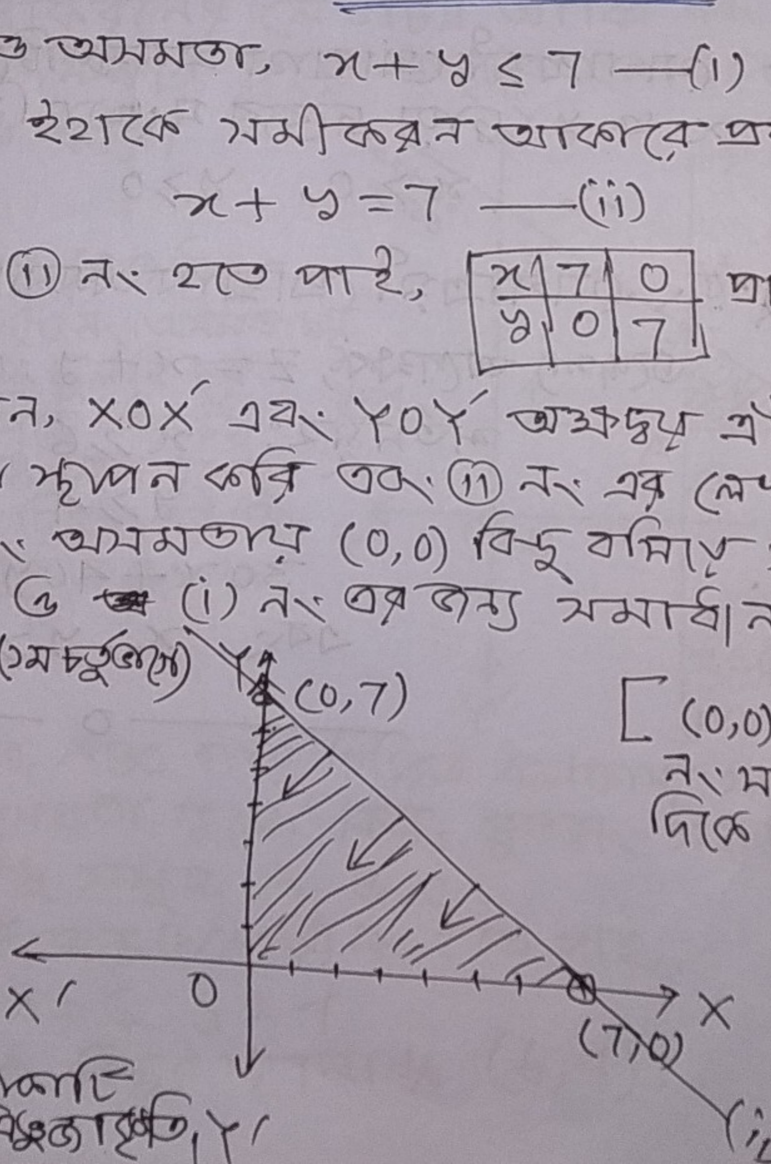
$x + y = 7$ —— (ii)

(ii) নং হতে পাই,

x	7	0
y	0	7

প্রাপ্ত বিন্দু (7,0) ও (0,7)

এখন, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় এঁকে প্রাপ্তবিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং (ii) নং এর লেখচিত্র আঁকি। (i) নং অসমতায় (0,0) বিন্দু বসিয়ে সত্যতা নিরূপণ করি ও (i) নং এর জন্য সমাধান এলাকা চিহ্নিত করি। (১ম চতুর্ভাগে)



[(0,0) বিন্দুর জন্য (i) নং সত্য বলে মূলবিন্দুর দিকে সমাধান আছে]

∴ আবদ্ধ এলাকাটি ত্রিভুজাকৃতি।

২(খ) নং প্রশ্নের উত্তর

মনেকরি, গামছার সংখ্যা x টি এবং তোয়ালের সংখ্যা y টি
∵ তিনি সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনবেন
সেহেতু উদ্দেশ্য অপেক্ষক হবে, $Z_{max} = x + y$

তিনি কমপক্ষে 6 খানা গামছা কিনবেন ও 4 খানা তোয়ালে কিনবেন।
∴ গামছার সংখ্যা, $x \geq 6$
এবং তোয়ালের " ; $y \geq 4$

প্রতিটি গামছার দাম 30 টাকা এবং তোয়ালের দাম 40 টাকা, তিনি 500 টাকার বেশি ব্যয় করবেন না।
∴ $30x + 40y \leq 500$

∵ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাটিতে সিদ্ধান্ত চলক x ও y দ্বারা দ্রব্যের সংখ্যা নির্দেশ করে,
∴ $x \geq 0$, $y \geq 0$

সুতরাং যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যাটি নিম্নরূপ:
উদ্দেশ্য অপেক্ষক, $Z = x + y$, কে সর্বোচ্চকরন।
শর্তসমূহ: $x \geq 6$
$y \geq 4$
$30x + 40y \leq 500$
এবং $x, y \geq 0$

——— o ———

6

২(গ) নং প্রশ্নের উত্তর

'খ' হতে পাই, $Z_{max} = x + y$

শর্ত: $x \geq 6$ —(i),

$y \geq 4$ —(ii)

$30x + 40y \leq 500$ —(iii)

$x, y \geq 0$

(i), (ii), (iii) নং অসমতাকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই, $x = 6$ —(iv), $y = 4$ —(v)

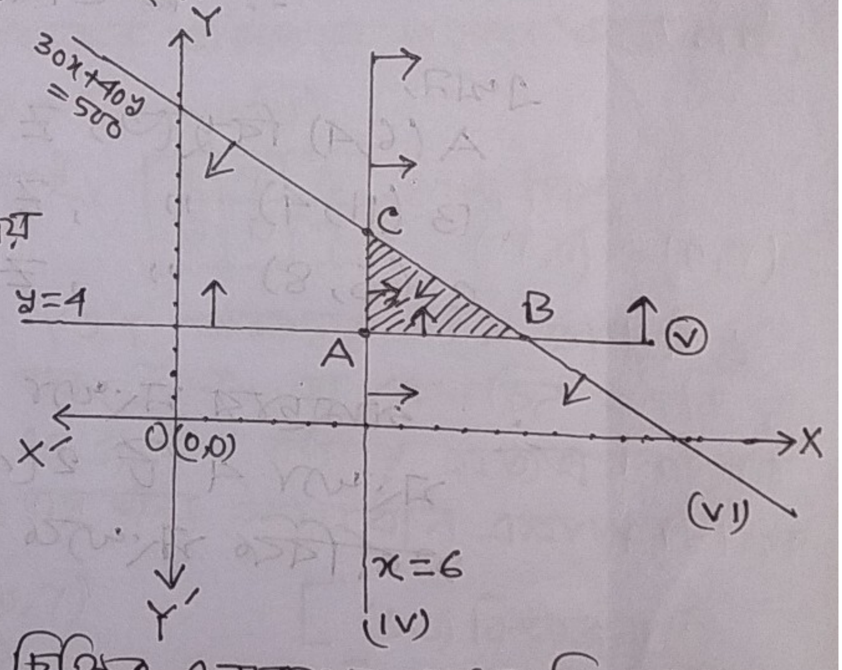
এবং $30x + 40y = 500$ —(vi)

(vi) নং হতে পাই,

x	$\frac{50}{3}$	0
y	0	$\frac{25}{2}$

এখন, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় এঁকে (iv), (v), (vi) নং সমীকরণের লেখচিত্র আঁকি এবং অসমতাগুলোর সত্যতা নিরূপণ করে তাদের সমাধান এলাকা চিহ্নিত করি।

[Note: লেখচিত্রে, (0,0) বিন্দুর জন্য (i) ও (ii) নং অসমতাদ্বয় মিথ্যা বলে মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে তীর চিহ্ন এবং (iii) নং সত্য বলে মূলবিন্দুর দিকে তীর চিহ্ন দ্বারা সমাধান দেখানো হয়েছে।]



লেখচিত্রে, ABC দাগ চিহ্নিত এলাকাস্থ সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। সুতরাং সমাধান এলাকার প্রান্তবিন্দু সমূহ A, B, C.

A বিন্দুর জন্য (iv) ও (v) নং হতে পাই,

$x = 6, \ y = 4$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, 4).

B বিন্দুর জন্য (v) ও (vi) নং হতে পাই, $y=4$

এবং $30x + 40 \times 4 = 500$

বা, $30x = 500 - 160 = 340$

বা, $x = \frac{34}{3}$

বা, $x = 11.33$

$\therefore x \approx 11$ (পূর্ণসংখ্যায় গামছার সংখ্যা)

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (11, 4)

C বিন্দুর জন্য (iv) ও (vi) হতে পাই, $x=6$

এবং $30 \times 6 + 40y = 500$

বা, $40y = 500 - 180 = 320$

বা, $y = \frac{320}{40}$

$\therefore y = 8$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, 8)

এখন,

A (6,4) বিন্দুতে, $Z = 6+4 = 10$

B (11,4) " , $Z = 11+4 = 15$ (সর্বোচ্চ)

C (6, 8) " , $Z = 6+8 = 14$

$\therefore$ গামছার সংখ্যা 11 টি এবং তোয়ালের সংখ্যা 4 টি হলে তিনি 500 টাকার মধ্যে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন।

Ans.

8