অধ্যায়: ৪র্থ (বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ)

পাঠ পরিকল্পনা ০২ অনুসারে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

১। x চলকের দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ নিম্নরূপ:

(i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{m-x} = \frac{1}{n}$ (ii) $ax^2+bx+c=0$

ক) $1+i\sqrt{2}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। 2

খ) (i) নং এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য d হলে, m, n, d এর মধ্যে একটি সম্পর্ক গঠন কর। 8

গ) (ii) নং এর মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাও যে, 8

$$(a\alpha+b)^{-3} + (a\beta+b)^{-3} = \frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$$

সমাধান:

১ নং (ক) প্রশ্নের উত্তর

Step-01

প্রদত্ত মূল $(1+i\sqrt{2})$ একটি অবাস্তব সংখ্যা।
∴ দ্বিঘাত সমীকরণটির অপর অবাস্তব মূল হবে $(1-i\sqrt{2})$
কারণ বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে অবাস্তব মূলদ্বয় অনুবন্ধী যুগলে থাকে।

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হবে,

Step:02

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (1+i\sqrt{2}+1-i\sqrt{2})x + (1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2}) = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 - 2i^2 = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 + 2 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

∴ $x^2 - 2x + 3 = 0$ Ans

Alternative:

Step 01

ধরি, $x = 1+i\sqrt{2}$

বা, $x - 1 = i\sqrt{2}$

Step 02

বা, $(x-1)^2 = (i\sqrt{2})^2$

বা, $x^2 - 2x + 1 = i^2 \cdot 2$

বা, $x^2 - 2x + 1 = -2$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $x^2 - 2x + 1 + 2 = 0$ বা, $x^2 - 2x + 3 = 0$ Ans

১(খ) নং প্র. উত্তর

step: 01 marks: 01

প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{x}+\frac{1}{m-x}=\frac{1}{n}$ বা, $\frac{m-x+x}{x(m-x)}=\frac{1}{n}$

বা, $\frac{m}{mx-x^2}=\frac{1}{n}$ বা $mn=mx-x^2$

$\therefore x^2-mx+mn=0$ ——— (i)

step: 02

মনে করি, এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore$ মূল ও সহগের সম্পর্ক থেকে পাই,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-m}{1}\right)=m$

এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}=mn$

Note:
$ax^2+bx+c=0$
হলে,
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

step: 03

শর্তমতে, $|\alpha-\beta|=d$

বা, $(\alpha-\beta)^2=d^2$ বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=d^2$

step: 04

বা, $m^2-4mn=d^2$

$\therefore m^2-4mn-d^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

১(গ) নং প্র: উত্তর

step-1

দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore$ মূল ও সহগের সম্পর্ক থেকে পাই,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ——— (i) এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ——— (ii)

step-2

(i) নং থেকে পাই, $a\alpha+a\beta=-b$

$\therefore a\alpha+b=-a\beta$ অথবা $a\beta+b=-a\alpha$ ——— (iii)

step-3

বামপক্ষ $=(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}=(-a\beta)^{-3}+(-a\alpha)^{-3}$ [(iii) হতে]

$=-\frac{1}{a^3\beta^3}-\frac{1}{a^3\alpha^3}$

$=-\frac{\alpha^3+\beta^3}{a^3\alpha^3\beta^3}=-\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{a^3(\alpha\beta)^3}$

step-4

$=-\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{a^3\left(\frac{c}{a}\right)^3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}=$ ডানপক্ষ।

(প্রমাণিত)

প্র ২। $g(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58$ এবং $f(x) = x^2 + bx + c$

ক) $x^2 - 6x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ) $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $5 - 2i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। ৪

গ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\left(\frac{1}{\beta} + \alpha\right)$ ও $\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান:

২(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক $= b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

২(খ) নং প্র. উ.

প্রদত্ত সমীকরণ, $g(x) = 0$

$\therefore x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$

দেওয়া আছে, সমীকরণটির একটি মূল $(5 - 2i)$, যা অবাস্তব।

$\therefore$ 〃 অপর একটি মূল $(5 + 2i)$

মনেকরি, অজানা মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore$ মূলগুলোর সমষ্টি, $5 - 2i + 5 + 2i + \alpha + \beta = -\left(\frac{-13}{1}\right)$

বা, $\alpha + \beta = 13 - 10$

বা, $\alpha + \beta = 3$ বা, $\alpha = 3 - \beta$ —(i)

এবং মূলগুলোর গুনফল, $(5 - 2i)(5 + 2i)\alpha\beta = \frac{58}{1}$

বা, $(25 - 4i^2)\alpha\beta = 58$ বা, $29\alpha\beta = 58$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $\alpha\beta = 2$ বা, $(3 - \beta)\beta = 2$ [(i) নং হতে]

বা, $3\beta - \beta^2 - 2 = 0$ বা, $\beta^2 - 3\beta + 2 = 0$

বা, $\beta^2 - 2\beta - \beta + 2 = 0$ বা $(\beta - 2)(\beta - 1) = 0$.

$\therefore \beta = 1$ অথবা $\beta = 2$

(i) নং হতে, $\beta = 1$ হলে $\alpha = 2$ / $\beta = 2$ হলে $\alpha = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলো, $5 - 2i, 5 + 2i, 1, 2$ Ans.

২(গ) নং প্র. উ.

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x)=0$ বা $x^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore$ মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$\alpha+\beta=-b$ ——(i) এবং $\alpha\beta=c$ ——(ii)

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\left(\frac{1}{\beta}+\alpha\right)$ এবং $\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{1}{\beta}+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=-b+\frac{-b}{c}=\frac{-bc-b}{c}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=\left(\frac{1}{\beta}+\alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)$

$=\frac{1}{\alpha\beta}+1+1+\alpha\beta$

$=\frac{1}{c}+2+c$

$=\frac{1+2c+c^2}{c}$

$=\frac{(c+1)^2}{c}$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ,

x^2- (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) x + মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

বা, $x^2-\left(\frac{-bc-b}{c}\right)x+\frac{(c+1)^2}{c}=0$

বা, $cx^2+b(c+1)x+(c+1)^2=0$

$\therefore\ cx^2+b(c+1)x+(c+1)^2=0$ Ans.

[বি.দ্র. প্রতি step এর জন্য নম্বর ০১.
ক) নং এ ২টি step থাকবে,
খ) নং এ প্রয়োগের ৪টি step থাকবে,
গ) নং এ প্রয়োগের ৪টি step থাকবে,]

৩। দু'টি ফাংশন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হল: **প্র. ০৫**

$f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $g(x)=cx^2+bx+a$.

ক) $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি ব্যাখ্যা কর।

খ) $f(x)=0$ এর একটি মূল $g(x)=0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুন হলে, দেখাও যে, $2a=c$ অথবা $(2a+c)^2=2b^2$

গ) $f(x)=0$ এবং $g(x)=0$ সমীকরন দুটির একটি সাধারন মূল থাকলে দেখাও যে, $a+c=\pm b$

সমাধান:

৩(ক) নং প্র. উ.

প্রদত্ত সমীকরন, $f(x)=0$ বা $ax^2+bx+c=0$

$\therefore$ সমীকরনটির পৃথায়ক $=b^2-4ac$

মূলের প্রকৃতি: (i) $b^2-4ac>0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

(ii) $b^2-4ac=0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান।

(iii) b^2-4ac একটি পূর্নবর্গ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও মূলদ

(iv) $b^2-4ac<0$ হলে মূলদ্বয় অবাস্তব/জটিল/কাল্পনিক

৩(খ) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরনদ্বয়, $g(x)=0$ বা $cx^2+bx+a=0$ —— (i)

এবং $f(x)=0$ বা $ax^2+bx+c=0$ —— (ii)

মনেকরি, (i) নং এর একটি মূল α

$\therefore$ (ii) নং এর একটি মূল হবে 2α

তাহলে, (i) ও (ii) নং হতে পাই, $c\alpha^2+b\alpha+a=0$ —— (iii) [(i) নং হ

এবং $4a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ —— (iv) [(ii) নং

এখন, (iii) ও (iv) হতে বজ্রগুনন পদ্ধতি অনুসারে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc-2ab}=\frac{\alpha}{4a^2-c^2}=\frac{1}{2bc-4ab}$$

$$\text{বা, } \frac{\alpha^2}{b(c-2a)}=\frac{\alpha}{(2a+c)(2a-c)}=\frac{1}{2b(c-2a)}$$

সমানুপাতি রাশির ধর্মানুসারে, (মধ্যরাশি)^2 = প্রান্তরাশিদুটির গুনফল।

$\therefore \{(2a+c)(2a-c)\}^2=b(c-2a)\cdot 2b(c-2a)$

বা, $(2a+c)^2(2a-c)^2-2b^2(2a-c)^2=0$ [পক্ষান্তর]

বা, $(2a-c)^2\{(2a+c)^2-2b^2\}=0$

হয় $(2a-c)^2=0$

বা, $2a-c=0$

$\therefore 2a=c$

অথবা, $(2a+c)^2-2b^2=0$

$\therefore (2a+c)^2=2b^2$

(প্রমানিত)

৩(গ) নং প্রশ্নের উত্তর

প্রদত্ত সমীকরনদ্বয়, $f(x)=0$ বা $ax^2+bx+c=0$
এবং $g(x)=0$ বা $cx^2+bx+a=0$ } —①

মনেকরি, সমীকরন দুইটির সাধারন মুল α.

$\therefore$ ① নং হতে পাই, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$
এবং $c\alpha^2+b\alpha+a=0$

আড়গুনন পদ্ধতি অনুসারে, $\dfrac{\alpha^2}{ab-bc}=\dfrac{\alpha}{c^2-a^2}=\dfrac{1}{ab-bc}$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{b(a-c)}=\dfrac{\alpha}{(c+a)(c-a)}=\dfrac{1}{b(a-c)}$

সমানুপাতিরাশির ধর্মানুসারে,
$(\text{মধ্যরাশি})^2=$ প্রান্তরাশিদ্বয়ের গুনফল

$\therefore \{(c+a)(c-a)\}^2=b(a-c).b(a-c)$

বা, $(c+a)^2(c-a)^2=b^2(a-c)^2$

বা, $(c+a)^2(c-a)^2=b^2(c-a)^2$

বা, $(c+a)^2=b^2$ [$c\neq a$ হলে $(c-a)^2\neq 0$]

$\therefore c+a=\pm b$

(দেখানো হল)

[বি.দ্র: ১। আড়গুনন/বজ্রগুনন পদ্ধতিতে এই অধ্যায়ের সব সমস্যায় ভগ্নাংশের হরে কোন সাধারন(Common) রাশি থাকলেও তা বাদ দিবে না, সমানুপাতি রাশির ধর্ম ব্যবহারের পর প্রয়োজনমত সমস্যাটিকে সমাধান করবে।
২। $a; b; c$ ক্রমিক সমানুপাতি হলে,
$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ বা $b^2=ac$ হয়]
এখানে, b মধ্যরাশি, a ও c প্রান্তরাশি

৪। $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ এবং $g(x)=ax^2+bx+c$ দুইটি x চলকের ফাংশন। [প্র. ০৭]

ক) $32x^3-48x^2+22x-3=0$ এর মূলত্রয় সমান্তর শ্রেণিভুক্ত হলে যেকোন একটি মূল নির্ণয় কর।

খ) $f(x)=0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে $\Sigma\alpha^3$ এর মান কত?

গ) $g(x)=0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $ac(x^2+1)-(b^2-2ac)x=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

<u>সমাধান</u>:

৪(ক) নং

প্রদত্ত সমীকরণ, $32x^3-48x^2+22x-3=0$

মনে করি, এর সমান্তর শ্রেণিভুক্ত মূল তিনটি $a-d, a, a+d$.

$\therefore$ মূলগুলোর সমষ্টি, $a-d+a+a+d=-\left(\frac{-48}{32}\right)$

বা, $3a=\frac{\cancel{48}\,3}{\cancel{32}\,2}$

বা, $3a=\frac{3}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore$ একটি মূল, $a=\frac{1}{2}$ <u>Ans.</u>

<u>৪(খ) নং প্র. উত্তর</u>

Step:01 প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x)=0$ বা $x^3+ax^2+bx+c=0$ এর মূলত্রয় α, β, γ. সুতরাং মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

S-2 এখন, $\Sigma\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma$

S-3 $=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$.

S-4 $=(-a)^3-3(-a)(b)+3(-c)$

$=-a^3+3ab-3c$

$=3ab-3c-a^3$

$\therefore \Sigma\alpha^3=3ab-3c-a^3$ <u>Ans.</u>

৪(গ) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x)=0$ বা $ax^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় α, β.

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ —(i), $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ —(ii)

এখন, অপর সমীকরণ,

$$ac(x^2+1)-(b^2-2ac)x=0$$

বা, $\frac{ac}{a^2}(x^2+1)-\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)x=0$ [a^2 দ্বারা ভাগ]

বা, $\frac{c}{a}(x^2+1)-\left(\frac{b^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{a}\right)x=0$

বা, $\alpha\beta(x^2+1)-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x=0$ [(i) ও (ii) হতে]

বা, $\alpha\beta(x^2+1)-(\alpha^2+\beta^2)x=0$

বা, $\alpha\beta x^2+\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2)x=0$

বা, $\alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$

বা, $\alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0$

বা, $(\beta x-\alpha)(\alpha x-\beta)=0$

হয়, $\beta x-\alpha=0$ অথবা $\alpha x-\beta=0$

বা, $\beta x=\alpha$ বা, $\alpha x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{\beta}$ $\therefore x=\frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore$ অপর সমীকরণটির মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$

Ans.

Note: $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

মূল ও সহগের সম্পর্ক:

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, [$-\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$]

" গুণফল, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, [$\frac{\text{ধ্রুবক}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$]

৫। $f(x) = 2bx^2 + 2(a+b)x + 3a$, $g(x) = x^2 - bx + c$ এবং $h(x) = x^2 - cx + b$ তিনটি ফাংশন। প্র. ০৯

ক) $(K-1)x^2 - (K+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে K এর মান কত? 2

খ) $f(x) = 2b$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলের দ্বিগুণ। দেখাও যে, $a = 2b$ অথবা $4a = 11b$ 8

গ) $g(x) = 0$ এবং $h(x) = 0$ সমীকরণের মুলগুলোর মধ্যে একই ধ্রুবকের পার্থক্য থাকলে দেখাও যে, $b + c + 4 = 0$. 8

সমাধান:

৫(ক) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $(K-1)x^2 - (K+2)x + 4 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান।

$\therefore$ পৃথায়ক $= 0$ $[b^2 - 4ac = 0]$

বা, $\{-(K+2)\}^2 - 4(K-1)\cdot 4 = 0$

বা, $K^2 + 4K + 4 - 16K + 16 = 0$

বা, $K^2 - 12K + 20 = 0$

বা, $K^2 - 10K - 2K + 20 = 0$

বা, $K(K-10) - 2(K-10) = 0$

বা, $(K-10)(K-2) = 0$

$\therefore K = 2, K = 10$ Ans.

৫(খ) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x) = 2b$

বা, $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$

$\therefore 2bx^2 + 2(a+b)x + (3a - 2b) = 0$

মনেকরি, সমীকরণটির একটি মূল α

$\therefore$ " অপর মূল 2α

মুল ও সহগের সম্পর্ক থেকে পাই,

মুলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + 2\alpha = -\frac{2(a+b)}{2b}$

বা, $3\alpha = -\frac{a+b}{b}$

$\therefore \alpha = \frac{-(a+b)}{3b}$

মূলদ্বয়ের গুনফল, $\alpha \cdot 2\alpha = \frac{3a-2b}{2b}$

বা, $2\alpha^2 = \frac{3a-2b}{2b}$ বা, $2 \cdot \frac{(a+b)^2}{9b^2} = \frac{3a-2b}{2b}$

বা, $\frac{2(a^2+2ab+b^2)}{9b} = \frac{3a-2b}{2\cancel{b}}$

বা, $4(a^2+2ab+b^2) = 9b(3a-2b)$

বা, $4a^2+8ab+4b^2-27ab+18b^2=0$

বা, $4a^2-19ab+22b^2=0$

বা, $4a^2-8ab-11ab+22b^2=0$

বা, $4a(a-2b)-11b(a-2b)=0$

বা, $(a-2b)(4a-11b)=0$

হয় $a-2b=0$ অথবা $4a-11b=0$

$\therefore a=2b$ অথবা $4a=11b$ (প্রমাণিত)

৫(গ) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $g(x)=0$ বা $x^2-bx+c=0$ —— (i)

এবং $h(x)=0$ বা $x^2-cx+b=0$ —— (ii)

মনেকরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

এবং (ii) " " " γ ও δ

$\therefore$ (i) হতে পাই, $\alpha+\beta=b, \alpha\beta=c$

(ii) " " ; $\gamma+\delta=c, \gamma\delta=b$

শর্তমতে, $\alpha-\gamma=k=\beta-\delta$ যেখানে k একটি ধ্রুবক

বা, $\alpha-\gamma=\beta-\delta$

বা, $\alpha-\beta=\gamma-\delta$ বা, $(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

বা, $b^2-4c=c^2-4b$ [মান বসিয়ে]

বা, $b^2-c^2+4b-4c=0$

বা, $(b+c)(b-c)+4(b-c)=0$

বা, $(b-c)(b+c+4)=0$

$\therefore b+c+4=0$ [$\because b-c\neq 0$]

(প্রমাণিত)